Early Journal Content on JSTOR, Free to Anyone in the World

This article is one of nearly 500,000 scholarly works digitized and made freely available to everyone in the world by JSTOR.

Known as the Early Journal Content, this set of works include research articles, news, letters, and other writings published in more than 200 of the oldest leading academic journals. The works date from the mid-seventeenth to the early twentieth centuries.

We encourage people to read and share the Early Journal Content openly and to tell others that this resource exists. People may post this content online or redistribute in any way for non-commercial purposes.

Read more about Early Journal Content at http://about.jstor.org/participate-jstor/individuals/early-journal-content.

JSTOR is a digital library of academic journals, books, and primary source objects. JSTOR helps people discover, use, and build upon a wide range of content through a powerful research and teaching platform, and preserves this content for future generations. JSTOR is part of ITHAKA, a not-for-profit organization that also includes Ithaka S+R and Portico. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

# ÜBER DIE VOLLSTÄNDIG REDUCIBLEN GRUPPEN, DIE ZU EINER GRUPPE LINEARER HOMOGENER SUBSTITUTIONEN GEHÖREN*

VON

ALFRED LOEWY

## *Einleitung.*

Unter einer Gruppe† $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen verstehen wir eine Gesamtheit linearer homogener Substitutionen von der Vollständigkeit, dass das Produkt irgend zweier Substitutionen sowie die reciproke Substitution jeder Substitution von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Die Abgeschlossenheit einer Gesamtheit linearer homogener Substitutionen inbezug auf die Productbildung ist für den Gruppencharakter nicht ausreichend. Die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ sollen keiner Annahme unterworfen sein, die Gruppe kann also continuirlich oder discontinuirlich sein, jedoch soll durch die Voraussetzung, dass $\mathfrak{G}$ stets das wirkliche Produkt irgend zweier seiner Substitutionen enthält, ausgeschlossen sein, dass $\mathfrak{G}$ eine Congruenzgruppe ist. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen heisst reducibel, wenn man $\nu < n$ lineare homogene Combinationen der Variablen mit constanten Coefficienten finden kann, die durch jede Substitution von $\mathfrak{G}$ nur unter einander transformirt werden. Anders ausgedrückt, eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen heisst reducibel, wenn man eine constante Matrix $T$ von nicht verschwindender Determinante angeben kann, dass alle Matrices der zu $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gruppe $\bar{\mathfrak{G}} = T\mathfrak{G}T^{-1}$ gleichzeitig von der besonderen Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{matrix}$$

werden und $\mathfrak{G}_{11}$ einen Inbegriff von Matrices mit $\nu < n$ Zeilen und Colonnen bedeutet. Die angewandte symbolische Bezeichnung sagt aus: man kann die Gruppe $\mathfrak{G}$ durch Einführung neuer Variablen in die Gruppe $\bar{\mathfrak{G}}$ transformiren, so dass jede Substitution der transformirten Gruppe $\bar{\mathfrak{G}}$ von der besonderen Form

* Presented to the Society (Chicago) April 22, 1905. Received for publication December 26, 1904.

† Für Gruppen sowie Gesamtheiten von Matrices benütze ich deutsche, für eine einzelne Matrix lateinische Buchstaben.

$$y_i = \sum_{j=1}^{\nu} g_{ij} y_j', \qquad y_k = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} y_j' \qquad (i = 1, \cdots, \nu;\ k = \nu+1, \cdots, n)$$

wird.

Eine jede reducible Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen lässt sich durch Einführung linearer homogener Functionen der Variablen mit constanten Coefficienten stets derartig in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = R\mathfrak{G}R^{-1}$ transformiren, wobei $R$ eine constante Matrix ist, dass gleichzeitig alle Matrices der Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$, oder, wie ich statt dessen kurz sage, die Gruppe $\mathfrak{A}$ von der besonderen Form:

$$\begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{\lambda 1} & a_{\lambda 2} & a_{\lambda 3} & a_{\lambda 4} & \cdots & a_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

wird. Sind die $\lambda$ mit $\mathfrak{G}$ isomorphen Gruppen linearer homogener Substitutionen, die durch die Matrices $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{\lambda\lambda}$ bestimmt werden, was stets zu erreichen und worauf für das Folgende besonderes Gewicht zu legen ist, irreducible Gruppen, so sagen wir: $\mathfrak{G}$ *ist unter Hervorhebung seiner irreduciblen Bestandteile oder Teilgruppen in eine ähnliche Gruppe transformirt.* Die irreduciblen Gruppen $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{\lambda\lambda}$ heissen *die irreduciblen Bestandteile oder Teilgruppen von* $\mathfrak{G}$, *die sich bei der Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *in der Form* $\mathfrak{A}$ *ergeben.*

Für die irreduciblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$ habe ich den auch für die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen wichtigen Satz hergeleitet, dass, wie auch immer $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung seiner irreduciblen Bestandteile in eine ähnliche Gruppe transformirt wird, die irreduciblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, falls man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt sind.*

Unter den Gruppen linearer homogener Substitutionen verdienen diejenigen besondere Aufmerksamkeit, die ich nach einem brieflichen Vorschlage von Herrn W. BURNSIDE † als *vollständig reducibel* bezeichne. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen heisst vollständig reducibel, wenn man wenigstens eine

* A LOEWY, *Über die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 4 (1903), p. 44. Eine Anwendung dieses Satzes auf höhere complexe Zahlen giebt Herr EPSTEEN in seiner Arbeit: *Semireducible hypercomplex number systems*, Transactions, vol. 4, p. 444.

† Inzwischen hat Herr W. BURNSIDE diese Bezeichnung auch in seinen Arbeiten, *On the reduction of a group of homogeneous linear substitutions of finite order*, Acta mathematica, vol. 28, 369–387, und *On the representation of a group of finite order as an irreducible group of linear substitutions and the direct establishment of the relations between the group-characteristics*, Proceedings of the London Mathematical Society (2), vol. 1 (1903), 117–123.

constante Matrix $R$ von nicht verschwindender Determinante finden kann, dass die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $R\mathfrak{G}R^{-1}$ von der besonderen Form

$$\{a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{\lambda\lambda}\}: \quad \begin{matrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{\lambda\lambda} \end{matrix}$$

wird, also, abgesehen von der Diagonale, die nur irreducible Bestandteile enthält, lauter Nullmatrices stehen. Eine vollständig reducible Gruppe ist also auf folgende Art charakterisirt: Man kann durch Einführung neuer Variablen stets erreichen, dass nach der Transformation die Variablen in Systeme zerfallen, die Variablen eines jeden Systemes sich nur unter einander transformiren und die Gruppen linearer homogener Substitutionen, die jedes Variablensystem für sich allein definirt, irreducibel sind. *In der Bezeichnung "vollständig reducibel" sollen auch die irreduciblen Gruppen eingeschlossen sein; bei den irreduciblen Gruppen ist in dem zuletzt hingeschriebenen Schema* $\lambda = 1$.

Bei einer grossen Klasse von Gruppen folgt aus ihrem Charakter unmittelbar ihre vollständige Reducibilität. Eine derartige Klasse von Gruppen habe ich in den Transactions* mitgeteilt, und Herr L. E. DICKSON† hat hieran anschliessend das von mir erhaltene Resultat in weitgehendster Weise verallgemeinert. Auf Grund der Dicksonschen Arbeit kann mit Hülfe des Begriffes der vollständigen Reducibilität, wenn wir ihn noch auf Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus einem Körper (vgl. S. 509) erweitern, der folgende Satz ausgesprochen werden: Ist $F$ irgend ein Rationalitätsbereich, der kein endlicher Körper ist, und $F(\rho_0)$ der aus $F$ durch Adjunction einer Wurzel $\rho_0$ einer Normalgleichung r-ten Grades im Rationalitätsbereiche $F$ hervorgehende Rationalitätsbereich, so ist jede Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $F$, die in $F$ irreducibel ist, in dem weiteren Rationalitätsbereiche $F(\rho_0)$ vollständig reducibel und zwar kann sie, wenn sie nicht auch in $F(\rho_0)$ irreducibel ist, in eine Gruppe $\{\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}'_{11}, \mathfrak{G}''_{11}, \cdots, \mathfrak{G}^{(r-1)}_{11}\}$ linear transformirt werden. $\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}'_{11}, \cdots, \mathfrak{G}_{11}^{(r-1)}$ bedeuten in $F(\rho_0)$ irreducible Gruppen linearer homogener Substitutionen, deren Coefficienten nicht ausnahmslos $F$ angehören. Die Substitutionen von $\mathfrak{G}_{11}^{(s)} (s = 1, 2, \cdots, r-1)$ werden erhalten, indem man in den Coefficienten jeder Matrix der Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{11}$ die Wurzel $\rho_0$ durch $\rho_s$ ersetzt; hierbei ist angenommen, dass die Normalgleichung r-ten Grades in $F$, die $\rho_0$ zur Wurzel hat, ausser $\rho_0$ noch die Wurzeln $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_{r-1}$ besitzt.

* A. LOEWY, *Über die Reducibilität der reellen Gruppen linearer homogener Substitutionen*, Transactions, vol. 4 (1903), 171–177.

† L. E. DICKSON, *On the reducibility of linear groups*, Transactions, vol. 4 (1903), 434–436.

Auf vollständig reducible Gruppen linearer homogener Substitutionen ist auch Herr I. SCHUR* in seiner ausgezeichneten Dissertation geführt worden. Er hat sich dort das Problem gestellt und auch völlig erledigt, das wir folgendermassen formuliren: Alle Gruppen $\mathcal{I}(\mathfrak{G})$ linearer homogener Substitutionen zu finden, die der allgemeinen Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $m$ Variablen isomorph sind, und bei denen die Substitutionscoefficienten ganze rationale homogene Functionen $n$-ter Dimension der $m^2$ Coefficienten der Gruppe $\mathfrak{G}$ sind. Von Herrn SCHUR's Resultaten führen wir an: Jede Gruppe $T(\mathfrak{G})$ ist vollständig reducibel (Vgl. S. 71). Die Gesamtheit aller irreduciblen Bestandteile der Gruppen $T(\mathfrak{G})$ ist, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, endlich und zwar gleich der Anzahl $k$ der Zerlegungen der ganzen Zahl $n$ in höchstens $m$ gleiche oder verschiedene positive Summanden. Zwei Gruppen $T(\mathfrak{G})$ sind dann und nur dann ähnlich, wenn stets in zwei entsprechenden Matrices der zwei isomorphen Gruppen die Summen der Glieder ihrer Hauptdiagonalen einander gleich sind. Die Ergebnisse des § 1 und § 2 meiner Arbeit, *Zur Gruppentheorie mit Anwendungen auf die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen*, Transactions, Bd. 5, S. 61, sind nur ganz specielle Fälle der Schurschen Theorie. Aus SCHUR's Untersuchungen ergiebt sich auch, dass man auf S. 65 in Formel (6) meines Aufsatzes $\Pi_r A$ noch weiter linear derartig transformiren kann, dass $A_{21} = 0$ wird; dies ist mir bisher nicht mit so einfachen Hülfsmitteln, wie ich sie am angeführten Orte anwandte, zu beweisen gelungen.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit beweise ich über vollständig reducible Gruppen das folgende Theorem: *Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformirt, ist vollständig reducibel.*

Nach einen von Herrn MOORE und mir † in der gleichen Woche veröffentlichten Satze gehört zu jeder endlichen Gruppe linearer homogener Substitutionen eine invariante definite Hermitesche Form. Aus dem mitgeteilten Theoreme folgt daher der von Herrn FROBENIUS ‡ im Verlaufe seiner tiefgehenden Untersuchungen über die endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen erhaltene und auch hiervon unabhängig von Herrn MASCHKE § gefundene Fun-

* I. SCHUR, *Über eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen*, Berlin, 1901.

† A. LOEWY, Comptes Rendus, vol. 123 (1896), 168–171; E. H. MOORE, Mathematische Annalen, Bd. 50, S. 213–219.

‡ G. FROBENIUS, *Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen*, I und II, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1897 u. 1899. Vgl. Jahrgang 1899, S. 483.

§ H. MASCHKE, *Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Coefficienten auftreten, intransitiv sind*, Mathematische Annalen, Band 52, S. 363. Einen neuen Beweis hat W. BURNSIDE in der S. 002 zuerst citirten Arbeit gegeben.

damentalsatz: *Jede endliche Gruppe linearer homogenen Substitutionen ist vollständig reducibel.*

Nicht jede reducible Gruppe linearer homogener Substitutionen ist vollständig reducibel. Ich leite in der vorliegenden Arbeit im § 2 und den folgenden Paragraphen — die Lectüre des § 1 ist für das Verständnis der folgenden Paragraphen entbehrlich — den für die Theorie der unendlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen, wie mir scheint, fundamentalen Satz her: *Zu jeder Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen gehören $\mu$ vollständig reducible Gruppen linearer homogener Substitutionen; diese sind ebenso wie die irreduciblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, völlig eindeutig bestimmt. Die $\mu$ vollständig reduciblen, zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppen sind, was für die irreduciblen Bestandteile von $\mathfrak{G}$ nicht zutrifft, auch ihrer Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Man kann also von der ersten, zweiten, u. s. w. bis $\mu$-ten vollständig reduciblen zu $\mathfrak{G}$ gehörigen Gruppe sprechen. Die Gesamtzahl der Variablen der $\mu$ Gruppen ist gleich der Variablenzahl von $\mathfrak{G}$. Ist $\mu = 1$, so ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ vollständig reducibel.* Zu den $\mu$ vollständig reduciblen Gruppen, die zu $\mathfrak{G}$ gehören, gelangt man auf folgende Weise: Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen kann durch eine constante Matrix $P$ von nicht verschwindender Determinante in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^* = P\mathfrak{G}P^{-1}$ der besonderen Form:

$$(\mathfrak{A}^*): \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 1} & \mathfrak{A}^*_{\mu 2} & \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \cdots & \cdots & \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{matrix}$$

transformirt werden, so dass die Gesamtheit von Matrices $\mathfrak{A}^*_{11}$, bez. $\mathfrak{A}^*_{22}, \mathfrak{A}^*_{33}, \cdots, \mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$ vollständig reducible Gruppen definiren. $\mathfrak{A}^*_{11}, \mathfrak{A}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$ lege ich als gewisse Maximalgruppen ihrer Art fest. (Vgl. § 5.) Eine Transformation von $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe, wie sie eben geschildert wurde, bezeichne ich als *eine Transformation von $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen.*

Eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in der Form $\mathfrak{A}^*$, also unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen, ist durchaus nicht eindeutig. Es gilt nun folgender Satz: *Wie auch immer eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen in eine ähnliche transformirt wird, so sind die vollständig reduciblen Gruppen, die sich bei einer derartigen Darstellung von $\mathfrak{G}$ ergeben, den vollständig reduciblen Gruppen, die sich*

*bei irgend einer anderen Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen ergeben,* DER REIHE NACH *zugeordnet, so dass zwei zugeordnete vollständig reducible Gruppen gleichviele Variablen haben und ähnliche Gruppen sind.*

Im § 6 setzen wir voraus, dass eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen vorgelegt sei, bei der alle Coefficienten sämtlicher Substitutionen Zahlen aus einem unendlichen Zahlkörper oder Rationalitätsbereiche $\Omega$ sind. Den Begriff der Reducibilität einer Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ bezüglich des Körpers $\Omega$ habe ich im § 4 meiner Arbeit, *Über die Reducibilität der Gruppen linearer homogener Substitutionen*, Transactions, Bd. 4, S. 58 ff., auseinandergesetzt. Die lineare homogene Substitutionsgruppe $\mathfrak{G}$ in $n$ Variablen, deren Substitutionscoefficienten ausnahmslos dem Körper $\Omega$ angehören, ist bezüglich $\Omega$ reducibel, wenn man $m < n$ lineare homogene Functionen der Variablen mit constanten Coefficienten finden kann, welche durch eine jede Substitution der Gruppe nur unter sich transformirt werden und dabei ausschliesslich Transformationen mit Coefficienten aus $\Omega$ erleiden. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ nenne ich *bezüglich des Körpers* $\Omega$ *vollständig reducibel*, wenn man wenigstens eine Matrix $R$ von nicht verschwindender Determinante finden kann, dass die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $R\mathfrak{G}R^{-1}$ von der besonderen Form $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}\}$ wird, $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\lambda\lambda}$ bezüglich des Körpers $\Omega$ irreducible Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ bedeuten und entsprechend dem benützten Symbole rechts wie links von jedem bezüglich $\Omega$ irreduciblen Bestandteile $\mathfrak{a}_{ii}(i = 1, 2, \cdots, \lambda)$ Nullmatrices stehen. Eine Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$, die bezüglich $\Omega$ vollständig reducibel ist, ist also auf folgende Weise charakterisirt: Man kann durch Einführung neuer Variablen stets erreichen, dass nach der Transformation die Variablen eines jeden Systems sich nur unter einander transformiren, die Gruppen linearer homogener Substitutionen, die jedes Variablensystem für sich allein definirt, nur Coefficienten aus $\Omega$ haben und bezüglich $\Omega$ irreducible Gruppen sind. In der Bezeichnung "bezüglich $\Omega$ vollständig reducibel" sollen auch die bezüglich $\Omega$ irreduciblen Gruppen mit Coefficienten aus $\Omega$ eingeschlossen sein. Im § 6 wird die Erweiterung der im § 2–§ 5 gegebenen Untersuchungen auf Gruppen mit Coefficienten aus $\Omega$ behandelt.

§ 1. *Gruppen, die eine definite Hermitesche Form in sich transformiren.*

Für die in der Überschrift genannten Gruppen soll der auf Seite 507 der Einleitung angegebene Satz bewiesen werden.* Nach Voraussetzung transformirt

* Inzwischen hat Herr I. SCHUR einen etwas einfacheren Beweis des Herrn FROBENIUS veröffentlicht. SCHUR, Sitzungsberichte Preuss. Akad. der Wiss., April 6, 1905, S. 416. Nachschrift vom August 1905.

die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen eine definite Hermitesche Form $H_1$ in sich. Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ eine irreducible Gruppe, so gehört $\mathfrak{G}$ zur Klasse der vollständig reduciblen Gruppen, und der Satz ist bewiesen. Sei daher $\mathfrak{G}$ eine reducible Gruppe. In diesem Falle giebt es eine constante Matrix $T$ von nicht verschwindender Determinante, dass die Matrices aller Substitutionen der transformirten Gruppe $\overline{\mathfrak{G}} = T\mathfrak{G}T^{-1}$ gleichzeitig von der Form:

$$(\overline{\mathfrak{G}}): \quad \begin{matrix} \overline{\mathfrak{G}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathfrak{G}}_{21} & \overline{\mathfrak{G}}_{22} \end{matrix}$$

werden; hierbei bedeuten $\overline{\mathfrak{G}}_{11}$, $\overline{\mathfrak{G}}_{21}$, $\overline{\mathfrak{G}}_{22}$ Matrices mit $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n-\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Colonnen. Da die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ nach Voraussetzung eine Hermitesche Form $H_1$ invariant lassen, existirt auch für die zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ eine invariante Hermitesche Form. Sie sei mit $H$ bezeichnet. Man findet sie aus der Hermiteschen Form $H_1$ durch Einführung der neuen Variablen der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in $H_1$. Ist $\overline{G}$ die Matrix einer beliebigen Transformation aus $\overline{\mathfrak{G}}$ und bedeutet stets *der obere Index* 0 *das Ersetzen aller Terme durch die conjugirt imaginären*, so ist nach der Frobeniusschen* Symbolik:

$(\overline{G}^0)'H\overline{G} = H$, und es wird: $H_1 = (T^0)'HT$. In den obigen Formeln bedeuten $(T^0)'$ bez. $(\overline{G}^0)'$ die zu $T^0$ bez. $\overline{G}^0$ transponirten oder conjugirten Matrices. Da $H_1$ eine definite Hermitesche Form ist, folgt, dass auch die aus $H_1$ durch Transformation hervorgehende Hermitesche Form $H$, die durch die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in sich transformirt wird, definit sein muss. $H$ möge lauten:

$$H = \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \alpha_{ik} z_i^0 z_k \qquad (\alpha_{ik}^0 = \alpha_{ki}).$$

Wir führen auf $H$ die Substitution:

$$(1) \qquad \begin{aligned} z_i &= y_i && (i=1, 2, \cdots, \nu), \\ z_{\nu+k} &= \lambda_{\nu+k,1} y_1 + \lambda_{\nu+k,2} y_2 + \cdots + \lambda_{\nu+k,\nu} y_\nu + y_{\nu+k} && (k=1, 2, \cdots, n-\nu), \end{aligned}$$

aus. Wir finden dann als Coefficienten von $y_i y_{\nu+k}^0$ $(i \leqq \nu,\ k \leqq n-\nu)$:

$$\alpha_{\nu+k,i} + \alpha_{\nu+k,\nu+1}\lambda_{\nu+1,i} + \alpha_{\nu+k,\nu+2}\lambda_{\nu+2,i} + \cdots + \alpha_{\nu+k,n}\lambda_{n,i}.$$

In der verwandten Substitution (1) bestimmen wir die Grössen $\lambda_{\nu+k,i}$ derartig, dass der soeben hingeschriebene Coefficient von $y_i y_{\nu+k}^0$ Null wird. Die für die $(n-\nu)\nu$ Grössen $\lambda_{ik}$ getroffene Wahl ist auch stets möglich; denn bei einer definiten Hermiteschen Form:

* G. FROBENIUS, *Über lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 1; ferner G. FROBENIUS, *Über die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variablen, ibid.*, Bd. 95, S. 264. Vgl. auch A. LOEWY, *Über bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen*, Nova Acta der Ksl-Leopold. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 71 (1898), No. 8.

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{ik}z_i^0 z_k,$$

müssen alle Hauptunterdeterminanten von Null verschieden sein, mithin ist auch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{\nu+1,\,\nu+1} & \cdots & \alpha_{\nu+1,\,n} \\ \alpha_{\nu+2,\,\nu+1} & \cdots & \alpha_{\nu+2,\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n,\,\nu+1} & \cdots & \alpha_{n,\,n} \end{vmatrix}$$

ungleich Null.

Wählt man die Substitutionscoefficienten für die Substitution (1), wie angegeben, so geht $H$ in die neue Hermitesche Form:

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu}\beta_{ik}y_i^0 y_k + \sum_{i=\nu+1}^{i=n}\sum_{k=\nu+1}^{k=n}\beta_{ik}y_i^0 y_k$$

über. Da die neue Hermitesche Form (2) aus der definiten Hermiteschen Form $H$ durch Transformation hervorgeht, so ist sie ebenso wie $H$ definit.

Durch Ausführung der Substitution (1) wird die rechts oben bei $(\bar{\mathfrak{S}})$ stehende Nullmatrix nicht zerstört, und $\bar{\mathfrak{S}}$ geht in die ähnliche Gruppe $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ der Form:

$$(\bar{\bar{\mathfrak{S}}}):\qquad \begin{matrix} \bar{\bar{\mathfrak{S}}}_{11} & 0 \\ \bar{\bar{\mathfrak{S}}}_{21} & \bar{\bar{\mathfrak{S}}}_{22} \end{matrix}$$

über; die Gruppe $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ transformirt die Hermitesche Form (2) in sich.

Durch lineare homogene Transformation der Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ für sich und gesonderte lineare homogene Transformation von $y_{\nu+1}, y_{\nu+2}, \cdots, y_n$ kann wegen des definiten Charakters der Hermiteschen Form (2) bewirkt werden, dass:

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu}{}'\beta_{ik}y_i^0 y_k \qquad \text{in} \qquad x_1x_1^0 + x_2x_2^0 + \cdots + x_\nu x_\nu^0$$

und

$$\sum_{i=\nu+1}^{i=n}\sum_{k=\nu+1}^{k=n}\beta_{ik}y_i^0 y_k \qquad \text{in} \qquad x_{\nu+1}x_{\nu+1}^0 + x_{\nu+2}x_{\nu+2}^0 + \cdots + x_n x_n^0$$

übergehen, wir also die Hermitesche Form $\sum_{i=1}^{i=n}x_i x_i^0$ erhalten.

Durch Einführung der neuen Variablen geht $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ in eine neue, zu $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ und daher auch zu $\mathfrak{S}$ ähnliche in den Variablen $x$ geschriebene Gruppe über; sie sei mit $\bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}$ bezeichnet. Durch Einführung der neuen Variablen wird die Nullmatrix, die bei $\bar{\bar{\mathfrak{S}}}$ rechts oben auftrat, nicht zerstört; daher wird $\bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}$ von der Form:

$$(\bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}):\qquad \begin{matrix} \bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}_{11} & 0 \\ \bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}_{21} & \bar{\bar{\bar{\mathfrak{S}}}}_{22}. \end{matrix}$$

Wir behaupten, dass jetzt auch $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{21}$ eine Nullmatrix ist. Die Gruppe $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ führt die Hermitesche Form

$$E = \sum_{i=1}^{i=n} x_i x_i^0$$

in sich über. Daher muss, wenn $\overline{\overline{G}}$ eine beliebige Substitution aus $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist, nach der Frobenius'schen Symbolik:

$$(\overline{\overline{G}}^0)' \overline{\overline{G}} = E$$

oder folglich

$$\overline{\overline{G}} = ((\overline{\overline{G}}^0)')^{-1}$$

sein. Diese Gleichung aber besagt, dass jeder Coefficient der Substitution $\overline{\overline{G}}$ gleich dem conjugirt imaginären Werte der ihm zugehörigen Unterdeterminante $n-1$ ten Grades dividirt durch den conjugirt imaginären Wert der Substitutionsdeterminante ist. Die Unterdeterminanten, die aber zu Coefficienten der ersten $\nu$ Colonnen und letzten $n-\nu$ Zeilen gehören, sind Null, da jede derselben die $\nu(n-\nu)$ Nullen der rechts oben stehenden Nullmatrix enthält; folglich ist $\overline{\overline{G}}_{21}$ Null zu setzen.*

Sind $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{11}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{22}$ irreducible Gruppen linearer homogener Substitutionen, so ist unser Satz bewiesen. Sind $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{11}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{22}$ oder ist eine dieser Gruppen reducibel, so führt jede von ihnen eine definite Hermitsche Form, nämlich

$$x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \cdots + x_\nu x_\nu^0$$

bez.

$$x_{\nu+1} x_{\nu+1}^0 + x_{\nu+2} x_{\nu+2}^0 + \cdots + x_n x_n^0,$$

in sich über. Die Teilgruppen sind folglich von demselben Charakter wie die ursprünglichen. Eine eventuelle wiederholte Anwendung des gleichen Verfahrens wie oben erweist daher sicher die Richtigkeit unseres Satzes, indem sie schliesslich zu irreduciblen Teilgruppen mit sich gesondert transformirenden Variablen führt.

Im Voraufgehenden habe ich den gleichen Gedankengang benützt, der Herrn MASCHKE in der oben citirten Arbeit dazu führt, die vollständige Reducibilität der endlichen Gruppen linearer homogener Substitutionen zu zeigen. Die von Herrn MASCHKE verwandten Schlüsse musste ich jedoch etwas modificiren, da seine Darstellung ein kleines Versehen enthält, auf dass ich aufmerksam zu machen nicht unterlassen kann. Herr MASCHKE will nachweisen, dass man *jede* Hermitesche Form:

---

*Vgl. hierzu das von Herrn STICKELBERGER im § 2 der Programmabhandlung des Züricher Polytechnikums, *Ueber reelle orthogonale Substitutionen* (1877), bewiesene Lemma: "Wenn in einem (nicht notwendig reellen) orthogonalen System alle Coefficienten verschwinden, welche $m$ Zeilen mit $n-m$ Colonnen gemeinsam haben, so verschwinden auch alle diejenigen, welche die übrigen $n-m$ Zeilen mit den übrigen $m$ Colonnen gemeinsam haben."

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n}\alpha_{ik}z_i^0 z_k,$$

durch eine lineare homogene Substitution von nicht verschwindender Determinante:

$$z_i = \sum_{k=1}^{k=\nu}\lambda_{ik}y_k \qquad (i=1, 2, \cdots, \nu),$$

$$z_i = y_i + \sum_{k=1}^{k=\nu}\lambda_{ik}y_k \qquad (i=\nu+1, \nu+2, \cdots, n),$$

in die Form:

$$\sum_{i=1}^{i=\nu}\sum_{k=1}^{k=\nu}\beta_{ik}y_i^0 y_k + \sum_{i=\nu+1}^{i=n}\sum_{k=\nu+1}^{k=n}\beta_{ik}y_i^0 y_k$$

transformiren kann. Dies trifft nicht zu, wie das einfache Beispiel $z_1z_1^0 + z_1z_2^0 + z_2z_1^0$ lehrt; durch $z_1 = \lambda_{11}y_1$, $z_2 = y_2 + \lambda_{21}y_1$ kann die Form nie so transformirt werden, dass der Coefficient von $y_1y_2^0$, der $\lambda_{11}$ lautet, verschwindet. Thatsächlich liegt in der Festsetzung von Herrn MASCHKE auf Seite 368, Zeile 8: "Sei dies die Determinante $|\lambda_{ik}|$ für $i, k = 1, 2, \cdots, r$"* eine Bestimmung, die man nicht nach Willkür machen kann.

## § 2.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen sei reducibel und durch die Matrix $S$ von nicht verschwindender Determinante in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = S\mathfrak{G}S^{-1}$ transformirt, so dass diese die Form:

$$(\mathfrak{A}): \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{matrix}$$

annimmt; dabei bedeute $\mathfrak{A}_{11}$ einen Inbegriff von Matrices mit $\nu < n$ Zeilen und Colonnen, eine weitere Voraussetzung wird über $\mathfrak{A}_{11}$ in diesem § nicht gemacht. $\mathfrak{A}_{21}$ bez. $\mathfrak{A}_{22}$ bezeichnen einen Inbegriff von Matrices mit $n - \nu$ Zeilen und $\nu$ bez. $n - \nu$ Colonnen. $\mathfrak{G}$ möge ferner in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}$ der Form:

$$(\mathfrak{B}): \quad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 \\ \mathfrak{b}'_{21} & \mathfrak{b}'_{22} \end{matrix}$$

transformirt sein; hierbei bedeute $\mathfrak{b}_{11}$ eine Gesamtheit von Matrices mit $g_1 < n$ Zeilen und Colonnen und demnach $\mathfrak{b}'_{21}$ bez. $\mathfrak{b}'_{22}$ einen Inbegriff von Matrices mit $n - g_1$ Zeilen und $g_1$ bez. $n - g_1$ Colonnen. Über $\mathfrak{b}_{11}$ sei die für das Folgende wesentliche Voraussetzung gemacht, dass $\mathfrak{b}_{11}$ *eine irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen in* $g_1$ *Variablen* definire.

Die Substitutionen von $\mathfrak{A}$ mögen

* Herr MASCKKE hat statt meines $\nu$ den Buchstaben $r$.

$$y_i = \sum_{s=1}^{s=n} a_{is}^{(t)} y_s' \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{1}$$

lauten; $t$ habe hierbei die Werte $1, 2, 3, \cdots$ und charakterisire die einzelnen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$.*

Da die Gruppe $\mathfrak{A}$ die Form $(\mathfrak{A})$ hat, werden sich in (1) die ersten $\nu$ Variablen in der Form

$$y_i = \sum_{k=1}^{\nu} a_{ik}^{(t)} y_k' \qquad (i=1, \cdots, \nu) \tag{2}$$

transformiren; es wird also für $i \leqq \nu$, $k > \nu$ stets $a_{ik}^{(t)} = 0$ sein.

Die Substitutionen von $\mathfrak{B}$ mögen:

$$z_i = \sum_{s=1}^{s=n} b_{is}^{(t)} z_s' \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

lauten; der obere Index $t$, der die Werte $1, 2, 3, \cdots$ annehmen möge, soll dabei die einzelnen Substitutionen von $\mathfrak{B}$ angeben.

Die ersten $g_1$ Variablen, welche die Substitutionen der nach Voraussetzung irreduciblen Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ bestimmen, werden Substitutionen der Form:

$$z_i = \sum_{k=1}^{g_1} b_{ik}^{(t)} z_k' \qquad (i=1, \cdots, g_1;\ t=1, 2, \cdots;\ g_1 < n) \tag{4}$$

erleiden.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist den Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ähnlich; daher werden die zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ unter einander ähnlich sein, d. h. es wird eine Transformation:

$$z_i = q_{i1} y_1 + q_{i2} y_2 + \cdots + q_{in} y_n \qquad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

von nicht verschwindender Determinante $|q_{ik}|$ existiren, die mit der zu ihr cogredienten Substitution:

$$z_i' = \sum_{s=1}^{s=n} q_{is} y_s' \qquad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{5'}$$

alle Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{A}$ in die entsprechenden von $\mathfrak{B}$ überführt. Es wird also die symbolische Gleichung $\mathfrak{B} = Q\mathfrak{A}Q^{-1}$ statthaben. Die sich entsprechenden Substitutionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind durch gleiche Werte des oberen Index $t$ charakterisirt.

---

* Eine solche Charakterisirung der einzelnen Substitutionen von $\mathfrak{A}$ durch einen oberen Index $t$ ist eigentlich nur zulässig, wenn $\mathfrak{A}$ eine endliche oder abzählbare unendliche Menge von Substitutionen enthält. Besitzt $\mathfrak{A}$ eine nicht abzählbare Menge von Substitutionen, so kann man die einzelnen Substitutionen von $\mathfrak{A}$ nicht derartig durch einen oberen Index $t$ charakterisiren. Unsere Schlüsse gelten auch für unendliche Gruppen linearer homogener Substitutionen mit einer nicht abzählbaren Menge von Substitutionen, denn unsere Betrachtungen hängen *gar nicht von der Charakterisirung der Substitutionen durch den Index t ab.* Wir haben nur der Bequemlichkeit wegen im Texte den oberen Index $t$ benützt, um auf die Zuordnung der entsprechenden Substitutionen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegentlich hinweisen zu können.

Wir wollen folgenden Hilfsatz beweisen: *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen der Form* $(\mathfrak{A})$ *und* $(\mathfrak{B})$ *und werden durch irgend eine Transformation* (5) *von nicht verschwindender Determinante und die zu ihr cogrediente* (5′) *die Substitutionen der einen Gruppe in die der anderen übergeführt, so müssen, wenn* $\mathfrak{b}_{11}$ *eine irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen ist und zwischen* $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ *und* $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ *auch nur eine einzige lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, in der überführenden Transformation* (5) *die ersten* $g_1$ *Gleichungen* $(g_1 < n)$:

$$z_i = \sum_{k=1}^{\nu} q_{ik} y_k \qquad (i = 1, \cdots, g_1) \tag{$5_1$}$$

*lauten, also für* $i \leqq g_1$, $k > \nu$ *müssen die Grössen* $q_{ik}$ *notwendig Null sein.*

Den Beweis zerlegen wir in zwei Teile:

(I) Angenommen, es bestehe für *eine* der Zahlen $1, 2, \cdots, g_1$, die ich mit $l$ bezeichne, in der Substitution (5) die Relation:

$$z_l = q_{l1} y_1 + q_{l2} y_2 + \cdots + q_{l\nu} y_\nu . \tag{6}$$

Infolgedessen wird für die cogrediente Substitution:

$$z'_l = q_{l1} y'_1 + q_{l2} y'_2 + \cdots + q_{l\nu} y'_\nu . \tag{6′}$$

Nach Voraussetzung ist also $q_{l\nu+1} = q_{l\nu+2} = \cdots = q_{ln} = 0$.

Nach (6) und (2) wird:

$$z_l = \sum_{s=1}^{s=\nu} q_{ls} a_{s1}^{(t)} y'_1 + \sum_{s=1}^{s=\nu} q_{ls} a_{s2}^{(t)} y'_2 + \cdots + \sum_{s=1}^{s=\nu} q_{ls} a_{s\nu}^{(t)} y'_\nu . \tag{7}$$

Aus (4) und (5′) ergiebt sich:

$$z_l = \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{s1} y'_1 + \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{s2} y'_2 + \cdots + \sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{sn} y'_n . \tag{8}$$

Der Vergleich von (7) und (8) lehrt, dass die Coefficienten von $y'_{\nu+1}, y'_{\nu+2}, \cdots, y'_n$ in (8) verschwinden müssen, d. h. es müssen die Relationen bestehen:

$$\sum_{s=1}^{s=g_1} b_{ls}^{(t)} q_{si} = 0 \qquad (i = \nu+1, \cdots, n;\ t = 1, 2, \cdots). \tag{9}$$

Wir betrachten die erste dieser Relationen $(i = \nu + 1)$ und bedenken, dass infolge von (6) $q_{l\nu+1} = 0$ sein muss. Daher erhalten wir:

$$b_{l1}^{(t)} q_{1\nu+1} + b_{l2}^{(t)} q_{2\nu+1} + \cdots b_{ll-1}^{(t)} q_{l-1\nu+1} + b_{ll+1}^{(t)} q_{l+1\nu+1} + \cdots + b_{lg_1} q_{g_1\nu+1} = 0 . \tag{$9_1$}$$

Da $\mathfrak{b}_{11}$ eine irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen in $g_1$ Variablen ist, muss nach den Untersuchungen von Herrn MASCHKE* $t$ mindestens

*MASCHKE, a. a. O., S. 365, 366.

gleich $g_1 - 1$ sein; denn jede Gruppe linearer homogener Substitutionen, bei der die Anzahl der Substitutionen gleich oder kleiner als die um 2 verminderte Zahl der Substitutionsvariablen ist, ist notwendig reducibel. Daher stellt $(9_1)$ ein System von $t \geqq g_1 - 1$ linearen homogenen Gleichungen für die $g_1 - 1$ Grössen $q_{1\nu+1}, q_{2\nu+1}, \cdots, q_{l-1\,\nu+1}, q_{l+1\,\nu+1}, \cdots, q_{g_1\nu+1}$ dar: $l$ ist dabei eine durch (6) ganz bestimmt fixirte Zahl aus der Reihe der Zahlen $1, 2, \cdots, g_1$.

Sollen nicht sämtliche der $g_1 - 1$ Grössen:

$$q_{1\nu+1}, q_{2\nu+1}, \cdots, q_{l-1\,\nu+1}, q_{l+1\nu+1}, \cdots, q_{g_1\nu+1},$$

verschwinden, so muss jede der Determinanten:

$$\begin{vmatrix} b_{l1}^{(i_1)} & b_{l2}^{(i_1)} & \cdots & b_{ll-1}^{(i_1)} & b_{ll+1}^{(i_1)} & \cdots & b_{lg_1}^{(i_1)} \\ b_{l1}^{(i_2)} & b_{l2}^{(i_2)} & \cdots & b_{ll-1}^{(i_2)} & b_{ll+1}^{(i_2)} & \cdots & b_{lg^1}^{(i_2)} \\ \vdots & & & & & & \\ b_{l1}^{(ig_1-1)} & b_{l2}^{(ig_1-1)} & \cdots & b_{ll-1}^{(ig_1-1)} & b_{ll+1}^{(ig_1-1)} & \cdots & b_{lg_1}^{(ig_1-1)} \end{vmatrix},$$

die man erhält, wenn man $i_1, i_2, \cdots, i_{g_1-1}$ irgend welche $g_1 - 1$ verschiedene Werte aus der Zahlenreihe, die $t$ durchläuft, beilegt, Null sein. Anders ausgedrückt: Man muss aus der $l$-ten Zeile der Substitutionsgruppe $\mathfrak{b}_{11}$ die $g_1 - 1$ Coefficienten:

$$b_{l1}, b_{l2}, \cdots, b_{ll-1}, b_{ll+1}, \cdots, b_{lg_1},$$

herausgreifen können, dass jede der Determinanten, gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je $g_1 - 1$ Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$, verschwindet. Tritt dies aber ein, so ist die Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$, wie aus einem Satze von Herrn MASCHKE * folgt, reducibel. Infolgedessen bleibt nur übrig, dass die $g_1 - 1$ Grössen:

$$(10) \qquad q_{1\nu+1}, q_{2\nu+1}, \cdots, q_{l-1\nu+1}, q_{l+1\nu+1}, \cdots, q_{g_1\nu+1}$$

sämtlich gleichzeitig verschwinden.

Mit Hülfe der weiteren Gleichungen des Systems (9) wird auf genau die gleiche Weise der Nachweis geführt, dass:

$$(10) \qquad q_{1i} = q_{2i} = \cdots = q_{l-1i} = q_{l+1i} = \cdots = q_{g_1i} = 0 \qquad (i = \nu+2, \cdots, n)$$

ist.

Unter Berücksichtigung von (10) und

$$q_{l\nu+1} = q_{l\nu+2} = \cdots = q_{ln} = 0$$

ergiebt sich daher, dass im Falle (I) die ersten $g_1$ Gleichungen von (5) notwendig die Form $(5_1)$ haben müssen.

(II). Wir setzen jetzt voraus, dass zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ irgend eine lineare homogene Relation:

* H. MASCHKE, a. a. O., S. 364, 366.

$$d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_\nu y_\nu + e_1 z_1 + e_2 z_2 + \cdots + e_{g_1} z_{g_1} = 0 \tag{11}$$

bestehe. Hierbei bedeuten $d_1, d_2, \cdots, d_\nu, e_1, e_2, \cdots, e_{g_1}$ Constante, von denen weder alle $d$ noch alle $e$ Null sind. Wir führen Fall (II) auf (I) zurück. Zu dem Zwecke setzen wir:

$$\bar{z}_1 = e_1^{(1)} z_1 + e_2^{(1)} z_2 + \cdots + e_{g_1}^{(1)} z_{g_1} \tag{12}$$

und verstehen unter $e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, \cdots, e_{g_1}^{(1)}$ dieselben Grössen wie unter $e_1, e_2, \cdots, e_{g_1}$. Die Änderung der Bezeichnung ist nur aus Gründen des Symmetrie vorgenommen. Wir führen $g_1 - 1$ neue weitere Variablen $\bar{z}_2, \bar{z}_3, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ durch die Gleichungen:

$$\bar{z}_k = \sum_{i=1}^{g_1} e_i^{(k)} z_i \qquad (k = 2, 3, \cdots, g_1), \tag{12}$$

ein, hierbei sind die $e_i^{(k)}$ ganz willkürliche Constante, die nur so gewählt sein sollen, dass die Determinante $|e_k^{(i)}|$ $(i = 1, 2, \cdots, g_1;\ k = 1, 2, \cdots, g_1)$ von Null verschieden ist. Durch die Formel:

$$\bar{z}_i' = e_1^{(i)} z_1' + e_2^{(i)} z_2' + \cdots + e_{g_1}^{(i)} z_{g_1}' \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1) \tag{12'}$$

definiren wir die sich mit $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ cogredient transformirenden Variablen $\bar{z}_1', \bar{z}_2', \cdots, \bar{z}_{g_1}'$. Führt man in der Gruppe $\mathfrak{B}$ für $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ die Variablen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ ein, ersetzt ferner $z_1', z_2', \cdots, z_{g_1}'$ nach (12′) durch $\bar{z}_1', \bar{z}_2', \cdots, \bar{z}_{g_1}'$, behält hingegen $z_{g_1+1}, z_{g_1+2}, \cdots, z_n$ sowie $z_{g_1+1}', z_{g_1+2}', \cdots, z_n'$ bei, so geht die Gruppe $\mathfrak{B}$ in eine ähnliche Gruppe $\bar{\mathfrak{B}}$ über; die letztere ist dann in den Variablen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}, z_{g_1+1}, z_{g_1+2}, \cdots, z_n$ bez. den Variablen $\bar{z}_1', \bar{z}_2', \cdots, \bar{z}_{g_1}', z_{g_1+1}', z_{g_1+2}', \cdots, z_n'$ geschrieben. Bedeutet:

$$q_{ik}' = e_1^{(i)} q_{1k} + e_2^{(i)} q_{2k} + \cdots + e_{g_1}^{(i)} q_{g_1 k} \quad (i = 1, 2, \cdots, g_1;\ k = 1, 2, \cdots, n), \tag{13}$$

so ergiebt sich aus (5) und (12):

$$\begin{aligned} \bar{z}_i &= q_{i1}' y_1 + q_{i2}' y_2 + \cdots + q_{in}' y_n \qquad (i = 1, \cdots, g_1), \\ z_i &= q_{i1} y_1 + q_{i2} y_2 + \cdots + q_{in} y_n \qquad (i = g_1 + 1, \cdots, n). \end{aligned} \tag{14}$$

Die hierzu cogrediente Substitution ist nach (5′) und (12′) gegeben durch:

$$\begin{aligned} \bar{z}_i' &= q_{i1}' y_1' + q_{i2}' y_2' + \cdots + q_{in}' y_n' \qquad (i = 1, \cdots, g_1), \\ z_i' &= q_{i1} y_1' + q_{i2} y_2' + \cdots + q_{in} y_n' \qquad (i = g_1 + 1, \cdots, n). \end{aligned} \tag{14'}$$

Die Formeln (14) und (14′) vermitteln den Übergang von der Gruppe $\mathfrak{A}$ zu der ihr ähnlichen Gruppe $\bar{\mathfrak{B}}$. In $\bar{\mathfrak{B}}$ transformiren sich die Variablen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_{g_1}$ nach der irreduciblen Gruppe $\bar{\mathfrak{b}}_{11}$, die aus der irreduciblen Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ infolge der Transformation (12) hervorgeht. Ersetzt man in (11) die Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ durch ihre Werte nach (5), so erhält man durch Nullsetzen der Factoren von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ das Gleichungssystem:

$$(11_1) \qquad d_i + e_1 q_{1i} + e_2 q_{2i} + \cdots + e_{g_1} q_{g_1 i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

wobei $d_{\nu+1} = d_{\nu+2} = \cdots = d_n = 0$ ist. Beachtet man (13), so wird die Relation: $\bar{z}_1 = -(d_1 y_1 + d_2 y_2 + \cdots + d_\nu y_\nu)$ durch Benützung der ersten $\nu$ Gleichungen $(11_1)$ übergehen in:

$$(14_1) \qquad \bar{z}_1 = q'_{11} y_1 + q'_{12} y_2 + \cdots + q'_{1\nu} y_\nu .$$

Da $\bar{\mathfrak{d}}_{11}$ eine irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen ist und die Gleichung $(14_1)$ besteht, muss nach dem in (I) dieses § bewiesenen Resultate:

$$(15) \qquad q'_{1i} = q'_{2i} = \cdots = q'_{g_1 i} = 0 \qquad (i = \nu+1, \cdots, n)$$

werden. Unter Beachtung von (13) lauten die ersten $g_1$ Gleichungen von (15):

$$e_1^{(i)} q_{1\nu+1} + e_2^{(i)} q_{2\nu+1} + \cdots + e_{g_1}^{(i)} q_{g_1 \nu+1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1).$$

Da die Determinante

$$|e_k^{(i)}| \qquad (i = 1, 2, \cdots, g_1 ; k = 1, 2, \cdots, g_1)$$

von Null verschieden ist, müssen die Grössen

$$q_{1\nu+1}, \; q_{2\nu+1}, \; \cdots, \; q_{g_1 \nu+1}$$

sämtlich verschwinden. Ebenso schliesst man aus den Gleichungen (15) weiter, dass:

$$q_{1i} = q_{2i} = \cdots = q_{g_1 i} = 0 \qquad (i = \nu+2, \cdots, n)$$

wird.

Hiermit ist gezeigt, dass bei den über die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gemachten Voraussetzungen, wenn $y_1, y_2, \cdots, y_\nu, z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ nicht linear unabhängig sind, in der Transformation (5) die ersten $g_1$ Variablen sich notwendig nach $(5_1)$ transformiren.

## § 3.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen sei in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$ der Form:

$$(\mathfrak{A}^*) \qquad \begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} \end{matrix}$$

transformirt, dabei sollen $\mathfrak{A}^*_{11}$, $\mathfrak{A}^*_{21}$, $\mathfrak{A}^*_{22}$ einen Inbegriff von Matrices mit $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n - \nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n - \nu$ Zeilen und $n - \nu$ Colonnen bedeuten.

*Definirt* $\mathfrak{A}^*_{11}$, *für sich betrachtet, eine vollständig reducible Gruppe linearer homogener Substitutionen,* und existirt *keine* Matrix $L$ von nicht verschwindender Determinante, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche $L\mathfrak{G}L^{-1}$ der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{\epsilon+1, \epsilon+1} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} \end{matrix}$$

überführt, wobei $\mathfrak{a}_{\epsilon+1,\,\epsilon+1}$ eine irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen in $f_{\epsilon+1}(f_{\epsilon+1} > 0)$ Variablen bedeute und demnach $\mathfrak{A}^*_{31}$, $\mathfrak{A}^*_{32}$, $\mathfrak{A}^*_{33}$ Matrices mit $n-\nu-f_{\epsilon+1}$ Zeilen und $\nu$ bez. $f_{\epsilon+1}$ bez. $n-\nu-f_{\epsilon+1}$ Colonnen vorstellen, so sagen wir: *die Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist unter Hervorhebung ihrer grössten vollständig reduciblen Gruppe* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *in die Gruppe* $\mathfrak{A}^*$ *transformirt worden.*

Hat man eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen, so kann man offenbar durch wiederholte Einführung linearer homogener Functionen der Variablen mit constanten Coefficienten die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Hülfe einer Matrix $S$ von nicht verschwindender Determinante in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A} = S\mathfrak{G}S^{-1}$ transformiren, so dass diese ähnliche Gruppe die Form:

$$(16)\quad (\mathfrak{A}):\quad \begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{a}_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\epsilon-1,\,\epsilon-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{a}_{\epsilon,\,\epsilon} & 0 \\ A_{\epsilon+1,\,1} & A_{\epsilon+1,\,2} & A_{\epsilon+1,\,3} & A_{\epsilon+1,\,4} & \cdots & A_{\epsilon+1,\,\epsilon-1} & A_{\epsilon+1,\,\epsilon} & A_{\epsilon+1,\,\epsilon+1} \end{matrix}$$

annimt. $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}$ sollen hierbei irreducible Bestandteile sein, deren Variablen sich ausnahmslos gesondert für sich transformiren (rechts und links von jedem $\mathfrak{a}_{ii}$ stehen lauter Nullmatrices). Unter Umständen kann $\epsilon = 1$ sein. Ist es *unmöglich*, die Gruppe $\mathfrak{A}$ durch weitere Einführung neuer Variablen in die Form

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{a}_{\epsilon,\,\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{a}_{\epsilon+1,\,\epsilon+1} & 0 \\ A_{\epsilon+2,\,1} & A_{\epsilon+2,\,2} & A_{\epsilon+2,\,3} & \cdots & A_{\epsilon+2,\,\epsilon} & A_{\epsilon+2,\,\epsilon+1} & A_{\epsilon+2,\,\epsilon+2} \end{matrix}$$

zu bringen, so ist $(\mathfrak{A})$ *eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppe* $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}\}$. *Die soeben hingeschriebene, vollständig reducible Gruppe bezeichnen wir mit* $\mathfrak{A}_{11}$ und demgemäss benützen wir auch für die Darstellung $(\mathfrak{A})$ dieses § die Bezeichnung:

$$(16_1)\qquad (\mathfrak{A}):\quad \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}. \end{matrix}$$

Ich suche hierdurch Anlehnung an die Bezeichnung des § 2, nur ist in diesem § $\mathfrak{A}_{11}$ eine vollständig reducible Gruppe, wohingegen im § 2 keine derartige Bedingung statthatte.

Die Transformation einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche unter Hervorhebung einer grössten vollständig reduciblen Gruppe ist durchaus nicht eindeutig. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ sei unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppe in analoger Weise wie in die Gruppe $\mathfrak{A}$ auch in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}$ transformirt. $\mathfrak{B}$ möge die Form

$$(17)\quad (\mathfrak{B}):\quad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{b}_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathfrak{b}_{\epsilon'-1,\,\epsilon'-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{b}_{\epsilon',\,\epsilon'} & 0 \\ B_{\epsilon'+1,1} & B_{\epsilon'+1,2} & B_{\epsilon'+1,3} & B_{\epsilon'+1,4} & \cdots & B_{\epsilon'+1,\,\epsilon'-1} & B_{\epsilon'+1,\,\epsilon'} & B_{\epsilon'+1,\,\epsilon'+1} \end{matrix}$$

haben. $\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}$ bedeuten hierbei irreducible Bestandteile von $\mathfrak{G}$. Die Darstellung $(\mathfrak{B})$ werde ich auch mit

$$(17_1)\qquad (\mathfrak{B}):\quad \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{matrix}$$

bezeichnen. Hierbei bedeutet $\mathfrak{B}_{11}$ die vollständig reducible Gruppe $\{\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}\}$. Um Anschluss an den § 2 zu gewinnen, soll die Gruppe $\mathfrak{B}$ der Form $(\mathfrak{B})$ auch mit:

$$(17_2)\qquad (\mathfrak{B}):\quad \begin{matrix} \mathfrak{b}_{11} & 0 \\ \mathfrak{b}'_{21} & \mathfrak{b}'_{22} \end{matrix}$$

bezeichnet werden.

Die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, die durch $(16_1)$ und $(17_2)$ dargestellt werden, sind ähnliche Gruppen, ferner ist $\mathfrak{b}_{11}$ eine irreducible Gruppe. Wir können daher die Ergebnisse des § 2 anwenden. Wir tun dies und benützen hierbei die gleichen Bezeichnungen wie im § 2. Infolge der Ähnlichkeit der zwei Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ giebt es Übergangsformeln (5) und (5′), welche die Substitutionen der zwei Gruppen in einander überführen. Angenommen, es bestehe zwischen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}, y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ nach Voraussetzung auch nur eine einzige lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, so müssen die Gleichungen $(5_1)$ bestehen, d. h. jede der Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ ist von $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ linear abhängig. Mithin sind nur zwei Fälle möglich: entweder sind $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ von $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ gleichzeitig linear abhängig oder gleichzeitig linear unabhängig.

Die Unmöglichkeit des zweiten Falles ergiebt sich daraus, dass in diesem § die Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung ihrer grössten vollständig reduciblen Gruppe $\mathfrak{A}_{11}$ in die Form $(\mathfrak{A})$ übergeführt sein soll. Angenommen nämlich, jede der Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ sei von den Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ linear unabhängig. In diesem Fall kann man eine zu $\mathfrak{A}$ und daher auch zu $\mathfrak{G}$ ähnliche Gruppe auf folgende Weise bilden: Wir halten $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ bei, nehmen hierzu noch die nach Annahme von diesen $\nu$ Variablen sowie auch unter einander unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$, die lineare homogene Functionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mit constanten Coefficienten sind, und führen zu diesen $\nu + g_1$ Variablen noch $n - \nu - g_1$ linear unabhängige Functionen von $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mit constanten Coefficienten ein. Die Gesamtheit der Matrices der auf diese Weise gewonnenen, zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{G}$ ähnlichen Gruppe lässt sich dann in der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{b}_{11} & 0 \\ \vartheta_{31} & \vartheta_{32} & \vartheta_{33} \end{matrix}$$

schreiben; dabei bedeuten $\vartheta_{31}$, $\vartheta_{32}$, $\vartheta_{33}$ einen Inbegriff von Matrices mit $n - \nu - g_1$ Zeilen und $\nu$ bez. $g_1$ bez. $n - \nu - g_1$ Colonnen. Die zuletzt erhaltene Darstellung steht im Widerspruch damit, dass $\mathfrak{A}$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppe $\mathfrak{A}_{11}$ sein soll. Mithin sind die Variablen in $\mathfrak{B}$, die sich auf $\mathfrak{b}_{11}$ beziehen, nicht von $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ linear unabhängig, und es gelten die Gleichungen $(5_1)$.

In genau der gleichen Weise ergiebt sich, da die Gruppe $\mathfrak{B}$ ja auch die Form (17), hat, dass die Variablen von $\mathfrak{B}$, die zu den irreduciblen Bestandteilen $\mathfrak{b}_{22}, \mathfrak{b}_{33}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}$ gehören, nicht von $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ linear unabhängig sein können; denn durch blosse Variablenvertauschung kann jeder der irreduciblen Bestandteile $\mathfrak{b}_{22}, \mathfrak{b}_{33}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}$ an die Stelle von $\mathfrak{b}_{11}$ treten.

Nehmen wir an, dass sich $\mathfrak{B}_{11}$ auf $\nu'$ Variablen bezieht, so werden, weil wir für die zu $\mathfrak{b}_{11}$ gehörigen Variablen die Gültigkeit der Gleichungen $(5_1)$ und für die zu $\mathfrak{b}_{22}, \mathfrak{b}_{33}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}$ gehörigen Variablen die Richtigkeit der zu $(5_1)$ analogen Gleichungen nachgewiesen haben, die ersten $\nu'$ Gleichungen der Transformation (5):

$$z_i = q_{i1} y_1 + q_{i2} y_2 + \cdots + q_{i\nu} y_\nu \qquad (i = 1, \cdots, \nu') \tag{18}$$

lauten. $\nu'$ kann nicht grösser als $\nu$ sein, denn sonst würden die $\nu'$ unabhängigen Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$, die zur Gruppe $\mathfrak{B}_{11}$ gehören, in Dependenz sein. Hieraus folgt:

$$\nu' \leqq \nu. \tag{19}$$

$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ sind ähnliche Gruppen; dieser Begriff ist aber ein wechselseitiger. Ferner spielen $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genau die gleiche Rolle. Infolge dieser

Gleichberechtigung ist der Schluss: $\nu' \geqq \nu$ gestattet. Unter Berücksichtigung von (19) ergiebt sich daher: $\nu' = \nu$, d. h. in $(16_1)$ und $(17_1)$ haben $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ die gleiche Anzahl Zeilen und Colonnen.

Setzt man in (18) $\nu = \nu'$, so sieht man die Richtigkeit des folgenden Resultats ein: *Wird die Gruppe* $\mathfrak{A}$ *der Form* $(16_1)$, *wobei* $\mathfrak{A}_{11}$ *die grösste vollständig reducible Gruppe* $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}\}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist, in eine ähnliche Gruppe* $\mathfrak{B}$ *der Form* $(17_1)$, *wobei* $\mathfrak{B}_{11}$ *die grösste vollständig reducible Gruppe* $\{\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}\}$ *bedeutet, übergeführt, so muss jede Matrix* $Q$ *von nicht verschwindender Determinante, welche die Überführung der einen Gruppe in die andere leistet, notwendig die Form:*

$$\begin{matrix} Q_{11} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} \end{matrix} \tag{20}$$

*haben. Hierbei besitzt die Matrix* $Q_{11}$ *genau ebensoviele Zeilen und Colonnen wie die Gruppen* $\mathfrak{A}_{11}$ *und* $\mathfrak{B}_{11}$.

In (20) ist $Q_{11}$ die Matrix von (18). Die Determinante von $Q$ ist von Null verschieden; mithin kann infolge der Form (20), die $Q$ hat, auch die Determinante von $Q_{11}$ nicht Null sein. Hieraus folgt die *Ähnlichkeit der zwei Gruppen* $\mathfrak{A}_{11}$ *und* $\mathfrak{B}_{11}$. *Es ist* $\mathfrak{B}_{11} = Q_{11}\mathfrak{A}_{11}Q_{11}^{-1}$. Nach dem in der Einleitung angegebenen Satze (Transactions, vol. 4, p. 46) wird $\epsilon = \epsilon'$.

## § 4.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen sei unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppe $\mathfrak{A}_{11}^*$ in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$ der Form:

$$(\mathfrak{A}^*): \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}_{11}^* & 0 \\ \mathfrak{A}_{21}^* & \mathfrak{A}_{22}^* \end{matrix} \tag{21}$$

transformirt. Ferner möge die Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppe $\mathfrak{B}_{11}^*$ in die ähnliche Gruppe:

$$(\mathfrak{B}^*): \quad \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11}^* & 0 \\ \mathfrak{B}_{21}^* & \mathfrak{B}_{22}^* \end{matrix} \tag{22}$$

übergeführt sein.

Wir wollen uns in diesem Paragraphen von einer im vorigen gemachten Voraussetzung befreien. Wir hatten im vorigen § die Gruppe $\mathfrak{G}$ unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppen $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ in die zwei ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Form $(16_1)$ und $(17_1)$ transformirt angenommen und hierbei für $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ die Form $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}\}$ bez. $\{\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}\}$ vorausgesetzt, man sollte also $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ den Charakter der vollständigen Reducibilität auf den ersten Blick ansehen. $\mathfrak{A}_{11}^*$ und $\mathfrak{B}_{11}^*$ sollen auch grösste voll-

ständig reducible Gruppen von $\mathfrak{G}$ vorstellen, jedoch braucht ihr Charakter der vollständigen Reducibilität nicht unmittelbar evident zu sein.

Die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ möge in den Variablen $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ bez. $y_1^{*\prime}, y_2^{*\prime}, \cdots, y_n^{*\prime}$, die Gruppe $\mathfrak{B}^*$ in den Variablen $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*$ bez. $z_1^{*\prime}, z_2^{*\prime}, \cdots, z_n^{*\prime}$ geschrieben sein.* Eine Substitution von nicht verschwindender Determinante, die mit ihrer cogredienten Substitution den Übergang der ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ in einander vermittelt, sei mit $Q^*$ bezeichnet, und laute:

$$z_i^* = q_{i1}^* y_1^* + q_{i2}^* y_2^* + \cdots + q_{in}^* y_n^* \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{23}$$

Die sich auf die Gruppe $\mathfrak{A}_{11}^*$ in $\mathfrak{A}^*$ beziehenden Variablen seien die Variablen $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_\nu^*$ bez. $y_1^{*\prime}, y_2^{*\prime}, \cdots, y_\nu^{*\prime}$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A}_{11}^*$ eine vollständig reducible Gruppe. Daher muss man ein neues Variablensystem $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ finden können, das sich durch $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_\nu^*$ linear homogen mit constanten Coefficienten ausdrückt, so dass durch Einführung von $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ für $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_\nu^*$ sowie der zu $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ cogredienten Variablen $y_1', y_2', \cdots, y_\nu'$ für $y_1^{*\prime}, y_2^{*\prime}, \cdots, y_\nu^{*\prime}$ die Gruppe $\mathfrak{A}_{11}^*$ in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}_{11}$ der Form $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}\}$ übergeht; hierbei sollen $\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}$ irreducible Gruppen sein.

Führt man für die zwei Variablensysteme $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_\nu^*$ und $y_1^{*\prime}, y_2^{*\prime}, \cdots, y_\nu^{*\prime}$, wie wir soeben angaben, die zwei neuen Variablensysteme $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ und $y_1', y_2', \cdots, y_\nu'$ ein, behält hingegen die Variablen $y_{\nu+1}^*, y_{\nu+2}^*, \cdots, y_n^*$ und $y_{\nu+1}^{*\prime}, y_{\nu+2}^{*\prime}, \cdots, y_n^{*\prime}$ bei, so geht die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ der Form (21) in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}$ der Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{matrix} \tag{24}$$

über. In (24) ist $\mathfrak{A}_{22}$ übrigens mit $\mathfrak{A}_{22}^*$ identisch; nur der Symmetrie wegen haben wir $\mathfrak{A}_{22}$ statt $\mathfrak{A}_{22}^*$ gesetzt. Die Gruppe $\mathfrak{A}$ erscheint in den Variablen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu, y_{\nu+1}^*, y_{\nu+2}^*, \cdots, y_n^*$ bez. $y_1', y_2', \cdots, y_\nu', y_{\nu+1}^{*\prime}, y_{\nu+2}^{*\prime}, \cdots, y_n^{*\prime}$ geschrieben.

In analoger Weise transformiren wir die Gruppe $\mathfrak{B}^*$ in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}$. Die sich auf die Gruppe $\mathfrak{B}_{11}^*$ in $\mathfrak{B}^*$ (vgl. 22) beziehenden Variablen mögen $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{\nu'}^*$ bez. $z_1^{*\prime}, z_2^{*\prime}, \cdots, z_{\nu'}^{*\prime}$ lauten. $\mathfrak{B}_{11}^*$ ist eine vollständig reducible Gruppe. Man muss daher ein neues Variablensystem $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$ finden können, das sich linear homogen mit constanten Coefficienten durch $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{\nu'}^*$ ausdrückt, so dass durch Einführung der Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$ für $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{\nu'}^*$ sowie der zu $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$ cogredienten Variablen $z_1', z_2', \cdots, z_{\nu'}'$ für $z_1^{*\prime}, z_2^{*\prime}, \cdots, z_{\nu'}^{*\prime}$ die Gruppe $\mathfrak{B}_{11}^*$ in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}_{11}$ der Form $\{\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}\}$ übergeht. $\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}$ bedeuten irreducible Gruppen.

* Wir benützen für die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ die gleichen Variablen wie für die Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ des vorigen §, nur haben die Variablen der Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ noch einen Stern beigefügt erhalten.

Die neu eingeführten Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$ mögen mit den alten $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_{\nu'}^*$ durch die Transformation:

$$z_i = m_{i1}z_1^* + m_{i2}z_2^* + \cdots + m_{i\nu'}z_{\nu'}^* \qquad (i=1, \cdots, \nu') \tag{25}$$

zusammenhängen; die Grössen $m_{ik}$ sind dabei Constante von nicht verschwindender Determinante. Die zu (25) cogrediente Transformation lautet:

$$z_i' = m_{i1}z_1^{*'} + m_{i2}z_2^{*'} + \cdots + m_{i\nu'}z_{\nu'}^{*'} \qquad (i=1, \cdots, \nu'). \tag{25'}$$

Führt man in der Gruppe $\mathfrak{B}^*$ die durch (25) und (25′) definirten Variablen $z_1, z_2, \cdots, z_{\nu'}$ bez. $z_1', z_2', \cdots, z_{\nu'}'$ ein, behält hingegen die Variablen $z_{\nu'+1}^*, z_{\nu'+2}^*, \cdots, z_n^*$ bez. $z_{\nu'+1}^{*'}, z_{\nu'+2}^{*'}, \cdots, z_n^{*'}$ bei, so geht die Gruppe $\mathfrak{B}^*$ der Form (22) in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}$ der Form:

$$(\mathfrak{B}): \quad \begin{matrix} \mathfrak{B}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{matrix}$$

über; hierbei ist übrigens $\mathfrak{B}_{22}^*$ mit $\mathfrak{B}_{22}$ identisch.

Die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$, ferner $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}$, sowie $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}$ sind ähnliche Gruppen. Mithin ist die Gruppe $\mathfrak{A}$ ähnlich zu $\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ grösste vollständig reducible Gruppen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Form $\{\mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{22}, \cdots, \mathfrak{a}_{\epsilon\epsilon}\}$ bez. $\{\mathfrak{b}_{11}, \mathfrak{b}_{22}, \cdots, \mathfrak{b}_{\epsilon'\epsilon'}\}$ sind, so beziehen sich, wie im § 3 bewiesen wurde, die zwei Gruppen $\mathfrak{A}_{11}$ und $\mathfrak{B}_{11}$ auf gleichviele Variablen, folglich ist $\nu = \nu'$

Die Substitution, welche die in den Variablen

$$z_1, z_2, \cdots, z_\nu, z_{\nu+1}^*, z_{\nu+2}^*, \cdots, z_n^*$$

geschriebene Gruppe $\mathfrak{B}$ in die in den Variablen

$$y_1, y_2, \cdots, y_\nu, y_{\nu+1}^*, y_{\nu+2}^*, \cdots, y_n^*$$

geschriebene Gruppe $\mathfrak{A}$ überführt, möge lauten:

$$z_i = q_{i1}y_1 + q_{i2}y_2 + \cdots + q_{i\nu}y_\nu + q_{i\nu+1}y_{\nu+1}^* + q_{i\nu+2}y_{\nu+2}^* + \cdots + q_{in}y_n^* \qquad (i=1, \cdots, \nu),$$

$$z_i^* = q_{i1}y_1 + q_{i2}y_2 + \cdots + q_{i\nu}y_\nu + q_{i\nu+1}y_{\nu+1}^* + q_{i\nu+2}y_{\nu+2}^* + \cdots + q_{in}y_n^* \quad (i=\nu+1, \cdots, n).$$

Nach dem Resultat, das wir im § 3 in der Formel (20) erhalten haben, muss

$$q_{1i} = q_{2i} = \cdots = q_{\nu i} = 0 \qquad (i=\nu+1, \cdots, n), \tag{26}$$

sein. Aus (25) und (23) finden wir, wenn man noch $\nu = \nu'$ beachtet, dass:

$$q_{i\nu+1} = \sum_{s=1}^{s=\nu} m_{is}q_{s\nu+1}^* \qquad (i=1, \cdots, \nu)$$

wird. Die Determinante $|m_{ik}|$ ist von Null verschieden; daher schliessen wir aus dem Verschwinden von $q_{1\nu+1}, q_{2\nu+1}, \cdots, q_{\nu\nu+1}$, dass:

$$q^*_{1\nu+1} = q^*_{2\nu+1} = \cdots = q^*_{\nu\nu+1} = 0$$

wird. In genau analoger Weise ergiebt sich aus den weiteren Gleichungen (26), dass:

$$q^*_{1i} = q^*_{2i} = \cdots = q^*_{\nu i} = 0 \qquad (i = \nu+2, \cdots, n)$$

wird. Die Gleichungen (23) lauten daher:

$$(27)\quad \begin{aligned} z^*_i &= q^*_{i1}y^*_1 + q^*_{i2}y^*_2 + \cdots + q^*_{i\nu}y^*_\nu && (i = 1, \cdots, \nu), \\ z^*_i &= q^*_{i1}y^*_1 + q^*_{i2}y^*_2 + \cdots + q^*_{i\nu}y^*_\nu + q^*_{i\nu+1}y^*_{\nu+1} + \cdots + q^*_{in}y^*_n && (i = \nu+1, \cdots, n). \end{aligned}$$

Die Matrix der durch (27) gegebenen Substitution ist folglich in der Form:

$$(Q^*): \quad \begin{matrix} Q^*_{11} & 0 \\ Q^*_{21} & Q^*_{22} \end{matrix}$$

zu schreiben; hierbei ist $Q^*_{11}$ eine Matrix mit ebensovielen Zeilen und Colonnen, wie sie die Gruppen $\mathfrak{A}^*_{11}$ und $\mathfrak{B}^*_{11}$ haben, nämlich $\nu$. $Q^*_{22}$ ist folglich eine Matrix mit $n - \nu$ Zeilen und Colonnen. Da $Q^*$ eine nicht verschwindende Determinante hat, verschwinden auch die Determinanten der zwei Matrices $Q^*_{11}$ und $Q^*_{22}$ nicht, wie aus der Form $(Q^*)$ der Matrix $Q^*$ unmittelbar ersichtlich ist.

Die Ähnlichkeit der Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$, welche durch die Matrix $Q^*$ vermittelt wird, kann symbolisch durch die Gleichung:

$$(28)\qquad \mathfrak{B}^* = Q^*\mathfrak{A}^*(Q^*)^{-1} \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{B}^*Q^* = Q^*\mathfrak{A}^*$$

ausgedrückt werden. Da $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ die Form (21) und (22) haben und $Q^*$, wie wir eben sahen, analog gebaut ist, folgt aus (28) unmittelbar, dass:

$$(29)\qquad \mathfrak{B}^*_{11}\,Q^*_{11} = Q^*_{11}\,\mathfrak{A}^*_{11}$$

und

$$(30)\qquad \mathfrak{B}^*_{22}\,Q^*_{22} = Q^*_{22}\,\mathfrak{A}^*_{22}$$

wird. Da $Q^*_{11}$ und $Q^*_{22}$ von Null verschiedene Determinanten haben, so sagen die Gleichungen (29) und (30) aus, die Gruppe $\mathfrak{A}^*_{11}$ ist mit der Gruppe $\mathfrak{B}^*_{11}$ und die Gruppe $\mathfrak{A}^*_{22}$, die aus $\mathfrak{A}^*$ durch Streichen der ersten $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen hervorgeht, ist mit der Gruppe $\mathfrak{B}^*_{22}$, die sich durch Streichen der ersten $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen aus $\mathfrak{B}$ ergiebt, ähnlich.

Wir können daher folgenden Satz formuliren: *Hat man irgend eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in zwei ähnliche Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ unter Hervorhebung der grössten vollständig reduciblen Gruppen transformirt, so dass $\mathfrak{A}^*$ die Form:*

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} \end{matrix}$$

*und $\mathfrak{B}^*$ die Form:*

$$\begin{matrix} \mathfrak{B}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}^*_{21} & \mathfrak{B}^*_{22} \end{matrix}$$

*hat und bedeuten* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *und* $\mathfrak{B}^*_{11}$ *grösste vollständig reducible Gruppen, so beziehen sich* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *und* $\mathfrak{B}^*_{11}$ *auf die gleiche Anzahl von Variablen und sind ähnliche Gruppen. Das Gleiche trifft für die zwei Gruppen* $\mathfrak{A}^*_{22}$ *und* $\mathfrak{B}^*_{22}$ *zu. Jede Matrix* $Q^*$ *von nicht verschwindender Determinante, die bewirkt, dass*

$$\mathfrak{B}^* = Q^* \mathfrak{A}^* (Q^*)^{-1}$$

*wird, ist notwendig von der Form:*

$$\begin{matrix} Q^*_{11} & 0 \\ Q^*_{21} & Q^*_{22} \end{matrix}$$

$Q^*_{11}$ *ist hierbei eine Matrix mit gleichvielen Zeilen und Colonnen, wie sie* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *und* $\mathfrak{B}^*_{11}$ *haben. Die Ähnlichkeit der Gruppen* $\mathfrak{B}^*_{11}$ *und* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *sowie der Gruppen* $\mathfrak{B}^*_{22}$ *und* $\mathfrak{A}^*_{22}$ *wird durch die Matrices* $Q^*_{11}$ *bez.* $Q^*_{22}$ *bewirkt. Es ist* $\mathfrak{B}^*_{11} = Q^*_{11} \mathfrak{A}^*_{11} (Q^*_{11})^{-1}$, $\mathfrak{B}^*_{22} = Q^*_{22} \mathfrak{A}^*_{22} (Q^*_{22})^{-1}$.

Obgleich im Voraufgehenden schon enthalten, sprechen wir noch besonders das Theorem aus: *Wie auch immer eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *linearer homogener Substitutionen unter Hervorhebung ihrer grössten vollständig reduciblen Gruppe in eine ähnliche transformirt wird, so hat die grösste vollständig reducible Gruppe, die sich bei irgend einer derartigen Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ergiebt, gleichviele Variablen wie die grösste vollständig reducible Gruppe, die sich bei irgend einer anderen Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *ergiebt, und beide Gruppen sind ähnlich. Sieht man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden an, so ist die grösste vollständig reducible Gruppe von* $\mathfrak{G}$ *eindeutig bestimmt.*

## § 5.

Durch eine Matrix $P$ von nicht verschwindender Determinante sei die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in $n$ Variablen in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^* = P\mathfrak{G}P^{-1}$ der Form:

$$(\mathfrak{A}^*): \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 1} & \mathfrak{A}^*_{\mu 2} & \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \cdots & \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{matrix}$$

transformirt.* $\mathfrak{A}^*_{11}$ soll die grösste vollständig reducible Gruppe von $\mathfrak{A}^*$ sein. $\mathfrak{A}^*_{22}$ soll die grösste vollständig reducible Gruppe der Gruppe:

* Die Bezeichnung ist gegen § 4 geändert.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 2} & \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \cdots & \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{array}$$

sein. $\mathfrak{A}^*_{33}$ soll die grösste vollständig reducible Gruppe der Gruppe:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{43} & \mathfrak{A}^*_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \mathfrak{A}^*_{\mu 5} & \cdots & \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{array}$$

vorstellen. Auf diese Art soll die Bildung weitergehen. Man kann die Gruppe $\mathfrak{G}$ offenbar stets durch wiederholte Einführung linearer homogener Functionen der ursprünglichen Variablen mit constanten Coefficienten, also durch eine Matrix $P$ von nicht verschwindender Determinante, auf die eben beschriebene Weise in eine ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$ transformiren. Hat man die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in eine ähnliche Gruppe transformirt, so dass alle in der Diagonale stehenden Gruppen auf die geschilderte Art festgelegte, grösste vollständig reducible Gruppen der auf einander folgend durch Streichung aus $\mathfrak{A}^*$ entstehenden Gruppen sind, so sagen wir: die *Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ist unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen in eine ähnliche Gruppe transformirt worden.* Wir nennen auch *die zu* $\mathfrak{G}$ *ähnliche Gruppe* $\mathfrak{A}^*$ *der oben beschriebenen Form eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen.* $\mathfrak{A}^*_{11}$ *bezeichnen wir als die erste,* $\mathfrak{A}^*_{22}$ *als die zweite,* $\mathfrak{A}^*_{33}$ *als die dritte, u. s. w.,* $\mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$ *als die* $\mu$*-te zu* $\mathfrak{G}$ *gehörige vollständig reducible Gruppe, die sich bei der Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *in der Form* $(\mathfrak{A}^*)$ *ergiebt.*

$\mathfrak{G}$ möge ausser in die Form $(\mathfrak{A}^*)$ auch unter Hervorhebung aller auf einander folgender grösster vollständig reducibler Gruppen in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}^*$ der Form:

$$(\mathfrak{B}^*): \quad \begin{array}{ccccccc} \mathfrak{B}^*_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{B}^*_{21} & \mathfrak{B}^*_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{B}^*_{31} & \mathfrak{B}^*_{32} & \mathfrak{B}^*_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{B}^*_{\mu' 1} & \mathfrak{B}^*_{\mu' 2} & \mathfrak{B}^*_{\mu' 3} & \mathfrak{B}^*_{\mu' 4} & \cdots & \mathfrak{B}^*_{\mu'\mu'} \end{array}$$

transformirt sein. $\mathfrak{B}^*_{11}, \mathfrak{B}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{B}^*_{\mu'\mu'}$ bedeuten grösste vollständig reducible Gruppen der auf einander folgend aus $\mathfrak{B}^*$ durch Streichung entstehenden Gruppen.

Wir wollen jetzt den auf Seite 508 der Einleitung ausgesprochenen Satz beweisen. Wir haben also den Nachweis zu führen, dass die zwei Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$ und $\mathfrak{B}_{11}^*$, die zwei Gruppen $\mathfrak{A}_{22}^*$ und $\mathfrak{B}_{22}^*$, u. s. w., schliesslich die zwei Gruppen $\mathfrak{A}_{\mu\mu}^*$ und $\mathfrak{B}_{\mu'\mu'}^*$ ähnliche Gruppen sind, also auch $\mu = \mu'$ wird.

Die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ sind mit $\mathfrak{G}$ ähnlich, folglich sind sie auch unter einander ähnlich. Mithin existirt eine Matrix $K$ von nicht verschwindender Determinante, dass $\mathfrak{B}^* = K\mathfrak{A}^*K^{-1}$ wird. $\mathfrak{A}_{11}^*$ und $\mathfrak{B}_{11}^*$ sind grösste vollständig reducible Gruppen der ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$. Daher müssen nach dem letzten Satze des § 4 die Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$ und $\mathfrak{B}_{11}^*$ ähnlich sein, und die Matrix $K$ muss notwendig die Form:

$$\begin{matrix} K_{11} & 0 \\ K'_{21} & K'_{22} \end{matrix} \tag{31}$$

haben. $K_{11}$ bedeutet eine Matrix mit ebensovielen Zeilen und Colonnen, wie jede der zwei ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}_{11}^*$ und $\mathfrak{B}_{11}^*$ Variablen hat. Bezeichnen wir die Anzahl der Variablen, auf die sich $\mathfrak{A}_{11}^*$ und demnach auch $\mathfrak{B}_{11}^*$ bezieht, mit $\nu_1$, so sind $K'_{21}$ und $K'_{22}$ Matrices mit $n - \nu_1$ Zeilen und $\nu_1$ bez. $n - \nu_1$ Colonnen. Nach dem schon citirten Satze des § 4 führt die Matrix $K_{11}$ die Gruppe $\mathfrak{A}_{11}^*$ in die Gruppe $\mathfrak{B}_{11}^*$ über, es ist $\mathfrak{B}_{11}^* = K_{11}\mathfrak{A}_{11}^*K_{11}^{-1}$. Das Gleiche leistet $K'_{22}$ für die zwei Gruppen, die aus $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ durch Fortlassen der ersten $\nu_1$ Zeilen und $\nu_1$ Colonnen aus allen Matrices der Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ resultiren, d. h. die Matrix $K'_{22}$ transformirt die Gruppe:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}_{22}^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}_{32}^* & \mathfrak{A}_{33}^* & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}_{\mu 2}^* & \mathfrak{A}_{\mu 3}^* & \mathfrak{A}_{\mu 4}^* & \cdots & \mathfrak{A}_{\mu\mu}^* \end{matrix} \tag{32}$$

in die ähnliche Gruppe:

$$\begin{matrix} \mathfrak{B}_{22}^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{B}_{32}^* & \mathfrak{B}_{33}^* & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{B}_{\mu' 2} & \mathfrak{B}_{\mu' 3} & \mathfrak{B}_{\mu' 4} & \cdots & \mathfrak{B}_{\mu'\mu'}. \end{matrix} \tag{33}$$

$\mathfrak{A}_{22}^*$ und $\mathfrak{B}_{22}^*$ sind nach Voraussetzung grösste vollständig reducible Gruppen der zwei ähnlichen, durch (32) und (33) dargestellten Gruppen. Daher müssen nach dem im § 4 bewiesenen Satze die Gruppen $\mathfrak{A}_{22}^*$ und $\mathfrak{B}_{22}^*$ ähnlich sein, also im besonderen gleichviele Variablen haben; ferner muss die Matrix $K'_{22}$, welche die Gruppen (32) und (33) in einander transformirt, die Form:

$$\begin{matrix} K_{22} & 0 \\ K'_{32} & K'_{33} \end{matrix} \tag{34}$$

haben. Hierbei bedeutet $K_{22}$ eine Matrix, die ebensoviele Zeilen und Colonnen hat, wie jede der zwei ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}^*_{22}$ und $\mathfrak{B}^*_{22}$ Variablen besitzt. Hat jede der Gruppen $\mathfrak{A}^*_{22}$ und $\mathfrak{B}^*_{22}$ die Anzahl $\nu_2$ Variablen, so bedeuten $K'_{32}$ und $K'_{33}$ Matrices mit $n - \nu_1 - \nu_2$ Zeilen und $\nu_2$ bez. $n - \nu_1 - \nu_2$ Colonnen. Die Matrix $K_{22}$ führt die Gruppen $\mathfrak{A}^*_{22}$ und $\mathfrak{B}^*_{22}$ in einander über; es ist $\mathfrak{B}^*_{22} = K_{22}\mathfrak{A}^*_{22}K_{22}^{-1}$. Das Gleiche leistet die Matrix $K'_{33}$ für die zwei ähnlichen Gruppen:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{43} & \mathfrak{A}^*_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{A}^*_{\mu 3} & \mathfrak{A}^*_{\mu 4} & \mathfrak{A}^*_{\mu 5} & \cdots & \mathfrak{A}^*_{\mu\mu} \end{matrix} \tag{35}$$

und

$$\begin{matrix} \mathfrak{B}^*_{33} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{B}^*_{43} & \mathfrak{B}^*_{44} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{B}^*_{\mu' 3} & \mathfrak{B}^*_{\mu' 4} & \mathfrak{B}^*_{\mu' 5} & \cdots & \mathfrak{B}^*_{\mu'\mu'} \end{matrix} \tag{36}$$

$\mathfrak{A}^*_{33}$ und $\mathfrak{B}^*_{33}$ sind grösste vollständig reducible Gruppen der zwei durch (35) und (36) dargestellten ähnlichen Gruppen. Daher sind die Gruppen $\mathfrak{A}^*_{33}$ und $\mathfrak{B}^*_{33}$ ähnlich; ferner muss die Matrix $K'_{33}$ notwendig von der Form:

$$\begin{matrix} K_{33} & 0 \\ K'_{43} & K'_{44} \end{matrix} \tag{37}$$

sein. $K_{33}$ bedeutet eine Matrix mit gleichvielen Zeilen und Colonnen, wie jede der zwei ähnlichen Gruppen $\mathfrak{A}^*_{33}$ und $\mathfrak{B}^*_{33}$ Variablen hat. Die Matrix $K_{33}$ führt die zwei Gruppen $\mathfrak{A}^*_{33}$ und $\mathfrak{B}^*_{33}$ in einander über; es ist: $\mathfrak{B}^*_{33} = K_{33}\mathfrak{A}^*_{33}K_{33}^{-1}$. Fährt man so fort, so sieht man, dass $\mu = \mu'$ wird. Ferner ergiebt sich, dass stets die $i$-ten ($i = 1, 2, \cdots, \mu$) zu $\mathfrak{G}$ gehörigen vollständig reduciblen Gruppen $\mathfrak{A}^*_{ii}$ und $\mathfrak{B}^*_{ii}$, die sich bei den Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in den Formen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ ergeben, ähnliche Gruppen sind. Hiermit ist der am Schluss der Einleitung ausgesprochene Satz völlig bewiesen.

An das Voraufgehende knüpfen wir noch eine Bemerkung *über die Form irgend einer Substitution $K$ von nicht verschwindender Determinante, welche die Gruppe $\mathfrak{A}^*$ in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{B}^*$ überführt, so dass $\mathfrak{B}^* = K\mathfrak{A}^*K^{-1}$ wird. Die Matrix $K$ muss notwendig die Form:*

$$
(38)\qquad
\begin{array}{ccccc}
K_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
K_{21} & K_{22} & 0 & \cdots & 0 \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
K_{\mu 1} & K_{\mu 2} & K_{\mu 3} & \cdots & K_{\mu\mu}
\end{array}
$$

haben, also analog wie die Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ gebaut sein. Zur Herleitung von (38) sind nur die Formeln (31), (34), (37) und die (34), (37) analog gebildeten, sich weiter ergebenden Formeln benützt worden; ferner sind die Matrices $K'_{21}$, $K'_{32}$, $K'_{43}$ und die sich dann weiter einstellenden Matrices $K'_{54}, K'_{65}, \cdots, K'_{\mu\mu-1}$ etwas anders geschrieben worden. Wir spalteten nämlich $K'_{21}$ in Matrices mit sovielen Zeilen, wie sie $K_{22}, K_{33}, \cdots, K_{\mu\mu}$ angeben; auf diese Weise erhalten wir $K_{21}, K_{31}, \cdots, K_{\mu 1}$. Ebenso spalteten wir $K'_{32}$ in Matrices mit sovielen Zeilen, wie sie die Matrices $K_{33}, K_{44}, \cdots, K_{\mu\mu}$ angeben; auf diese Weise gewinnen wir die Matrices $K_{32}, K_{42}, \cdots, K_{\mu 2}$. Analog wurden $K'_{43}, K'_{54}, \cdots, K'_{\mu\mu-1}$ behandelt.

Die Matrices $K_{11}, K_{22}, \cdots, K_{\mu\mu}$ transformiren die Gruppen $\mathfrak{A}^*_{11}, \mathfrak{A}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{A}^*_{\mu\mu}$ der Reihe nach in die ähnlichen Gruppen $\mathfrak{B}^*_{11}, \mathfrak{B}^*_{22}, \cdots, \mathfrak{B}^*_{\mu\mu}$. Es ist symbolisch $\mathfrak{B}^*_{11} = K_{11}\mathfrak{A}^*_{11}K_{11}^{-1}$, $\mathfrak{B}^*_{22} = K_{22}\mathfrak{A}^*_{22}K_{22}^{-1}, \cdots, \mathfrak{B}^*_{\mu\mu} = K_{\mu\mu}\mathfrak{A}^*_{\mu\mu}K_{\mu\mu}^{-1}$.

## § 6.

Es sei irgend ein unendlicher Zahlkörper oder Rationalitätsbereich $\Omega$ gegeben. Unter einem Zahlkörper oder Rationalitätsbereich $\Omega$ verstehen wir im Folgenden ein System von unendlich vielen Zahlen, das von der Vollständigkeit ist, dass die Addition, Subtraction, Multiplication und Division (ausgenommen die Division durch Null) irgend welcher Zahlen des Systems nur wieder zu Zahlen desselben Systems führt. $\mathfrak{G}$ sei in diesem Paragraphen irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen, bei der die Coefficienten sämtlicher Substitutionen dem Körper $\Omega$ angehören. Die in den §§ 2–5 angestellten Untersuchungen lassen sich erweitern, wenn man jetzt sein Augenmerk auf die zu $\mathfrak{G}$ gehörigen grössten inbezug auf den Körper $\Omega$ vollständig reduciblen Gruppen linearer homogener Substitutionen richtet. Im § 2 wurden zunächst Sätze aus der Arbeit von Herrn MASCHKE im 52ten Bande der Mathematischen Annalen verwandt. Zu ihrer Herleitung benützt Herr MASCHKE nur Operationen, die sich mittelst rationaler Verbindungen der Substitutionscoefficienten der vorgelegten Gruppe durchführen lassen. Die Maschkeschen Sätze sind daher auch für Gruppen mit Coefficienten aus $\Omega$ gültig. Man hat mithin die Resultate: Jede Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$, deren Ordnungszahl um wenigstens zwei kleiner als die Anzahl der Substitutionsvariablen ist, ist eine inbezug auf den Körper $\Omega$ reducible Gruppe.

Kann man aus irgend einer Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ aus einer Zeile, etwa der $l$-ten, $g_1 - 1$ Coefficienten:

$$b_{l1},\ b_{l2},\ \cdots,\ b_{l\,l-1},\ b_{l\,l+1},\ \cdots,\ b_{l\,g_1},$$

herausgreifen, dass jede der Determinanten, gebildet aus den entsprechenden Coefficienten jeder möglichen Combination von je $g_1 - 1$ Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ verschwindet, so ist die Gruppe $\mathfrak{b}_{11}$ eine inbezug auf den Körper $\Omega$ reducible Gruppe linearer homogener Substitutionen.

Bei der Erweiterung der Betrachtungen des § 2 ist ferner zu beachten, dass zwei ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus einem Körper $\Omega$ stets durch eine lineare homogene Substitution $Q$ von nicht verschwindender Determinante mit ausschliesslich nur dem Körper $\Omega$ angehörigen Coefficienten in einander übergeführt werden können; denn die Substitutionscoefficienten sind in diesem Falle nur durch Auflösen mit einander verträglicher linearer Gleichungen mit Coefficienten aus $\Omega$ zu finden. Geht man die Untersuchungen des § 2 durch, so sieht man, dass falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Gruppen mit Coefficienten aus $\Omega$ sind und die überführende Substitution $Q$ ebenfalls nur Coefficienten aus $\Omega$ hat, alle im § 2 verwandten Operationen auch kein Heraustreten aus $\Omega$ erfordern, z. B. sind auch die Grössen $d_1, d_2, \cdots, d_\nu, e_1, e_2, \cdots, e_{g_1}$ der Gleichung (11), da sie im Fall ihrer Existenz durch die linearen Gleichungen $(11_1)$ mit Coefficienten aus $\Omega$ bestimmt sind, innerhalb des Körpers $\Omega$ bestimmbar. Wir gewinnen daher als Erweiterung des Seite 515 gegebenen Satzes das Resultat:

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen der Form $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ (vgl. S. 513) mit Coefficienten aus $\Omega$ und werden durch irgend eine Transformation (5) von nicht verschwindender Determinante mit Coefficienten aus $\Omega$ und die zu ihr cogrediente (5′) die Substitutionen der einen Gruppe in die der anderen übergeführt, so müssen, wenn $\mathfrak{b}_{11}$ eine bezüglich des Körpers $\Omega$ irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen ist und zwischen $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ und $z_1, z_2, \cdots, z_{g_1}$ auch nur eine einzige lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht, in der überführenden Transformation (5) die ersten $g_1$ Gleichungen $(g_1 < n)$:

$$(5_1) \qquad z_i = q_{i1}y_1 + q_{i2}y_2 + \cdots + q_{i\nu}y_\nu \qquad (i = 1, \cdots, g_1)$$

lauten, also für $i \leqq g_1$, $k > \nu$ müssen die Grössen $q_{ik}$ notwendig Null sein.

Nach Erweiterung des Resultats des § 2 definiren wir, was es heissen soll: *die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ ist unter Hervorhebung ihrer inbezug auf den Körper $\Omega$ grössten vollständig reduciblen Gruppe $\mathfrak{A}^*_{11}$ in die Gruppe $\mathfrak{A}^*$, deren Substitutionen auch nur ausschliesslich Coefficienten aus $\Omega$ besitzen sollen, transformirt.* Wir benützen die angegebene Bezeichnung, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substi-

tutionen in $n$ Variablen mit Coefficienten aus $\Omega$ in die ähnliche Gruppe $\mathfrak{A}^*$, die auch nur ausschliesslich Coefficienten aus $\Omega$ haben soll und die Form:

$$(\mathfrak{A}^*): \quad \begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} \end{matrix}$$

hat, transformirt ist, dabei sollen $\mathfrak{A}^*_{11}$, $\mathfrak{A}^*_{21}$, $\mathfrak{A}^*_{22}$ einen Inbegriff von Matrices mit Coefficienten aus $\Omega$ mit $\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n-\nu$ Zeilen und $\nu$ Colonnen, bez. $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Colonnen bedeuten, $\mathfrak{A}^*_{11}$ soll ferner eine inbezug auf den Körper $\Omega$ vollständig reducible Gruppe linearer homogener Substitutionen (vgl. wegen des Begriffes S. 509) definiren, und es soll keine Matrix $L$ von nicht verschwindender Determinante existiren, welche die Gruppe $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe $L\mathfrak{G}L^{-1}$ überführt, die auch nur ausschliesslich Coefficienten aus $\Omega$ hat und die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{a}_{\epsilon+1,\,\epsilon+1} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{31} & \mathfrak{A}^*_{32} & \mathfrak{A}^*_{33} \end{matrix}$$

besitzt, wobei $\mathfrak{a}_{\epsilon+1,\,\epsilon+1}$ eine inbezug auf den Körper $\Omega$ irreducible Gruppe linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ in $f_{\epsilon+1}$ ($f_{\epsilon+1}>0$) Variablen bedeute, und demnach $\mathfrak{A}^*_{31}$, $\mathfrak{A}^*_{32}$, $\mathfrak{A}^*_{33}$ Matrices mit $n-\nu-f_{\epsilon+1}$ Zeilen und $\nu$ bez. $f_{\epsilon+1}$ bez. $n-\nu-f_{\epsilon+1}$ Colonnen vorstellen.

Geht man die Betrachtungen der § 3 und § 4 durch, so sieht man, dass man alle dort verwandten Operationen innerhalb des Körpers $\Omega$ ausführen kann. Daher erhält man als Erweiterung der im §4 gegebenen Sätze folgendes Resultat: *Hat man irgend eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ in zwei ähnliche Gruppen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$, die auch nur Coefficienten aus $\Omega$ haben, unter Hervorhebung ihrer inbezug auf $\Omega$ grössten vollständig reduciblen Gruppen transformirt, so dass $\mathfrak{A}^*$ die Form:*

$$\begin{matrix} \mathfrak{A}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}^*_{21} & \mathfrak{A}^*_{22} \end{matrix}$$

*und $\mathfrak{B}^*$ die Form:*

$$\begin{matrix} \mathfrak{B}^*_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}^*_{21} & \mathfrak{B}^*_{22} \end{matrix}$$

*hat, und bedeuten $\mathfrak{A}^*_{11}$ und $\mathfrak{B}^*_{11}$ inbezug auf den Körper $\Omega$ grösste vollständig reducible Gruppen von $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$, so beziehen sich $\mathfrak{A}^*_{11}$ und $\mathfrak{B}^*_{11}$ auf die gleiche Anzahl von Variablen und sind ähnliche Gruppen. Das Gleiche trifft für die zwei Gruppen $\mathfrak{A}^*_{22}$ und $\mathfrak{B}^*_{22}$ mit Coefficienten aus $\Omega$ zu. Jede Matrix $Q^*$ von nicht verschwindender Determinante mit Coefficienten aus $\Omega$, die bewirkt, dass*

$$\mathfrak{B}^* = Q^* \mathfrak{A}^* (Q^*)^{-1}$$

*wird, ist notwendig von der Form:*

$$\begin{matrix} Q_{11}^* & 0 \\ Q_{21}^* & Q_{22}^* \end{matrix}.$$

$Q_{11}^*$ *ist hierbei eine Matrix mit gleichvielen Zeilen und Colonnen, wie sie* $\mathfrak{A}_{11}^*$ *und* $\mathfrak{B}_{11}^*$ *haben. Die Ähnlichkeit der Gruppen* $\mathfrak{B}_{11}^*$ *und* $\mathfrak{A}_{11}^*$ *wird durch die Matrix* $Q_{11}^*$, *die von* $\mathfrak{B}_{22}^*$ *und* $\mathfrak{A}_{22}^*$ *durch die Matrix* $Q_{22}^*$ *bewirkt. Es ist:*

$$\mathfrak{B}_{11}^* = Q_{11}^* \mathfrak{A}_{11}^* (Q_{11}^*)^{-1}$$
$$\mathfrak{B}_{22}^* = Q_{22}^* \mathfrak{A}_{22}^* (Q_{22}^*)^{-1}.$$

Es gilt also das Resultat: *Wie auch immer eine Gruppe* $\mathfrak{G}$ *linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus* $\Omega$ *unter Hervorhebung ihrer inbezug auf* $\Omega$ *grössten vollständig reduciblen Gruppe in eine ähnliche Gruppe mit Coefficienten aus* $\Omega$ *transformirt wird, so hat die inbezug auf* $\Omega$ *grösste vollständig reducible Gruppe, die sich bei irgend einer derartigen Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *ergiebt, gleichviele Variablen wie die inbezug auf* $\Omega$ *grösste vollständig reducible Gruppe, die sich bei irgend einer anderen derartigen Darstellung von* $\mathfrak{G}$ *ergiebt, und beide Gruppen sind ähnlich. Sieht man ähnliche Gruppen linearer homogener Substitutionen als nicht verschieden an, so ist die inbezug auf* $\Omega$ *grösste vollständig reducible Gruppe von* $\mathfrak{G}$ *eindeutig bestimmt.*

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus $\Omega$ kann analog wie im § 5 in eine ähnliche Gruppe mit Coefficienten aus $\Omega$ transformirt werden, so dass hierbei jetzt alle auf einander folgenden inbezug auf $\Omega$ grössten vollständig reduciblen Gruppen hervorgehoben werden. Wir bezeichnen eine derartige Transformation von $\mathfrak{G}$ in eine ähnliche Gruppe mit Coefficienten aus $\Omega$ als eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ *unter Hervorhebung aller auf einander folgender inbezug auf* $\Omega$ *grösster, vollständig reducibler Gruppen.*

Da zwei ähnliche Gruppen mit Coefficienten aus $\Omega$ stets durch eine lineare homogene Substitution von nicht verschwindender Determinante mit Coefficienten aus $\Omega$ in einander transformirbar sind, so bleiben auch alle Resultate des § 5 für Gruppen $\mathfrak{G}$ mit Coefficienten aus $\Omega$, wie wir sie jetzt betrachten, gültig.

*Zu jeder Gruppe* $\mathfrak{G}$ *linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus* $\Omega$ *gehören* $\mu$ *inbezug auf* $\Omega$ *vollständig reducible Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Coefficienten aus* $\Omega$*; diese sind, wenn man ähnliche Gruppen als nicht verschieden ansieht, sogar ihrer Reihenfolge nach eindeutig festgelegt. Man kann also von der ersten, zweiten, u. s. w. bis* $\mu$*-ten inbezug auf* $\Omega$ *vollständig reduciblen zu* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Gruppe sprechen. Die Gesamtzahl der Variablen der* $\mu$ *Gruppen ist gleich der Variablenzahl von* $\mathfrak{G}$.